

Для функций  $p(x)$ ,  $-\infty < x < \infty$ , указанных в написанных ниже примерах, решить следующие задачи.

1. Нарисовать график  $p(x)$  и определить, можно ли  $p(x)$  рассматривать в качестве математической модели случайного наблюдения?
2. Для значений  $x$ ,  $-\infty < x < \infty$ , вычислить функции

$$F(x) = \int_{-\infty}^x p(t) dt \quad \text{и} \quad G(x) = \int_x^{\infty} p(t) dt$$

и нарисовать их графики.

3. Исследовать функции  $p(x)$ ,  $F(x)$  и  $G(x)$  на монотонность и выпуклость.
4. Вычислить числа  $\mathbf{M}$  и  $\mathbf{D}$ , задаваемые интегралами

$$\mathbf{M} = \int_{-\infty}^{\infty} x p(x) dx, \quad \mathbf{D} = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mathbf{M})^2 p(x) dx.$$

**Пример 1**

$$p(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x < 0, \\ 3 e^{-3x}, & \text{если } x \geq 0. \end{cases}$$

**Пример 2**

$$p(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x < 0, \\ \frac{1}{3} e^{-x/3}, & \text{если } x \geq 0. \end{cases}$$

**Пример 3**

$$p(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x < 0, \\ \frac{1}{2} e^{-x/2}, & \text{если } x \geq 0. \end{cases}$$

**Пример 4**

$$p(x) = \begin{cases} 1/2, & \text{если } x \in [-2, 0], \\ 0, & \text{если } x \notin [-2, 0]. \end{cases}$$

**Пример 5**

$$p(x) = \begin{cases} 2, & \text{если } x \in [0, 1/2], \\ 0, & \text{если } x \notin [0, 1/2]. \end{cases}$$

**Пример 6**

$$p(x) = \begin{cases} 2, & \text{если } x \in [-1/2, 0], \\ 0, & \text{если } x \notin [-1/2, 0]. \end{cases}$$

**Пример 7**

$$p(x) = \begin{cases} 3, & \text{если } x \in [-1/3, 0], \\ 0, & \text{если } x \notin [-1/3, 0]. \end{cases}$$

**Пример 8**

$$p(x) = \begin{cases} 3, & \text{если } x \in [0, 1/3], \\ 0, & \text{если } x \notin [0, 1/3]. \end{cases}$$

**Пример 9**

$$p(x) = \begin{cases} 1/3, & \text{если } x \in [0, 3], \\ 0, & \text{если } x \notin [0, 3]. \end{cases}$$

**Пример 10**

$$p(x) = \begin{cases} 1/3, & \text{если } x \in [-3, 0], \\ 0, & \text{если } x \notin [-3, 0]. \end{cases}$$

**Пример 11**

$$p(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} \sin x, & \text{если } x \in [0, \pi], \\ 0, & \text{если } x \notin [0, \pi], \end{cases}$$

**Пример 12**

$$p(x) = \begin{cases} \sin x, & \text{если } x \in [0, \pi/2], \\ 0, & \text{если } x \notin [0, \pi/2]. \end{cases}$$

**Пример 13**

$$p(x) = \begin{cases} \cos x, & \text{если } x \in [0, \pi/2], \\ 0, & \text{если } x \notin [0, \pi/2]. \end{cases}$$

**Пример 14**

$$p(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} \cos x, & \text{если } x \in [-\pi/2, \pi/2], \\ 0, & \text{если } x \notin [-\pi/2, \pi/2]. \end{cases}$$

**Пример 15**

$$p(x) = \begin{cases} 6(x - x^2), & \text{если } x \in [0, 1], \\ 0, & \text{если } x \notin [0, 1]. \end{cases}$$

**Пример 16**

$$p(x) = \begin{cases} 12 \left( \frac{1}{4} - x^2 \right), & \text{если } x \in [0, 1/2], \\ 0, & \text{если } x \notin [0, 1/2]. \end{cases}$$

**Пример 17**

$$p(x) = \begin{cases} 3 \left( x^2 - x + \frac{1}{2} \right), & \text{если } x \in [0, 1], \\ 0, & \text{если } x \notin [0, 1]. \end{cases}$$

**Пример 18**

$$p(x) = \begin{cases} 6 \left( x^2 + \frac{1}{4} \right), & \text{если } x \in [0, 1/2], \\ 0, & \text{если } x \notin [0, 1/2]. \end{cases}$$

**Пример 19**

$$p(x) = \begin{cases} \frac{3}{4} (x^2 + 1), & \text{если } x \in [0, 1], \\ 0, & \text{если } x \notin [0, 1]. \end{cases}$$

**Пример 20**

$$p(x) = \begin{cases} \frac{3}{7} \left( x^2 + x + \frac{3}{2} \right), & \text{если } x \in [0, 1], \\ 0, & \text{если } x \notin [0, 1]. \end{cases}$$

**Пример 21**

$$p(x) = \begin{cases} \frac{3}{10} (x^2 + 2x + 2), & \text{если } x \in [0, 1], \\ 0, & \text{если } x \notin [0, 1]. \end{cases}$$

**Пример 22**

$$p(x) = \begin{cases} \frac{3}{3r-2} \left[ x^2 + (r-2)x + \frac{r}{2} \right], & \text{если } x \in [0, 1], \\ 0, & \text{если } x \notin [0, 1], \end{cases}$$

где фиксированный параметр  $r = 2, 3, \dots$ , является обобщением примеров 19-21.

**Пример 23**

$$p(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x < 0, \\ \lambda e^{-\lambda x}, & \text{если } x \geq 0, \end{cases}$$

где фиксированный параметр  $\lambda > 0$ , является обобщением примеров 1-3.