3 Доверительные интервалы

3.1 Доверительные интервалы параметров нормальной выборки

3.1.1 Математическая модель

Нормальная выборка $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $x_i \sim \mathcal{N}(a, \sigma)$, записывается в виде

$$x_i \triangleq a + \sigma \xi_i, \quad \xi_i \sim \mathcal{N}(0, 1), \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (*)$$

где n – объём выборки, $x_1, x_2, \dots, x_n$ – наблюдаемые (известные) значения измерений, ξ_i – независимые нормальные случайные величины со стандартным распределением $\mathcal{N}(0, 1)$, а a , σ^2 и $\sigma > 0$ – фиксированные (неслучайные) параметры, которые называются, соответственно, математическим ожиданием $a = \mathbf{M}x_i$, дисперсией $\sigma^2 = \mathbf{D}x_i$ и среднеквадратичным отклонением $\sigma = \sqrt{\mathbf{D}x_i}$ наблюдения x_i и предполагаются неизвестными. Иногда один из параметров a или σ можно считать известным.

3.1.2 Определение доверительного интервала

Пусть задан уровень значимости (вероятность ошибки) α или коэффициент доверия $1 - \alpha$. Надо указать зависящие от наблюдений $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ величины a_α^- , a_α^+ и σ_α^- , σ_α^+ для которых

$$\Pr\{a_\alpha^- < a < a_\alpha^+\} \geq 1 - \alpha, \quad \Pr\{\sigma_\alpha^- < \sigma < \sigma_\alpha^+\} \geq 1 - \alpha.$$

Тогда интервал $(a_\alpha^-; a_\alpha^+)$ ($(\sigma_\alpha^-; \sigma_\alpha^+)$) называют *доверительным интервалом* (другими словами, *интервальной оценкой*) для параметра a (σ) с коэффициентом доверия $1 - \alpha$. Говорят также, что доверительный интервал покрывает неизвестный теоретический параметр с (достаточно большой) вероятностью $1 - \alpha$. *Радиусы* этих интервалов

$$\epsilon_\alpha = \frac{a_\alpha^+ - a_\alpha^-}{2}, \quad \epsilon_\sigma = \frac{\sigma_\alpha^+ - \sigma_\alpha^-}{2}$$

позволяют судить о *точности* отмеченных в Задании 2 приближенных равенств между выборочными характеристиками и теоретическими параметрами выборки.

3.1.3 Распределения хи-квадрат и Стьюдента

Для построения доверительных интервалов параметров нормальной выборки с теоретическим распределением $\mathcal{N}(a, \sigma)$ используются двусторонние квантили (критические значения) следующих двух распределений вероятностей, получаемых с помощью стандартного нормального распределения $\mathcal{N}(0, 1)$:

$$\chi_N^2 \triangleq \xi_1^2 + \xi_2^2 + \dots + \xi_N^2, \quad T_N \triangleq \frac{\xi_0}{\sqrt{\frac{\chi_N^2}{N}}}, \quad \xi_i \sim \mathcal{N}(0, 1),$$

где ξ_i , $i = 0, 1, 2, \dots, N$, – независимые стандартные случайные величины, имеющие распределение $\mathcal{N}(0, 1)$. Распределение *положительной* случайной величины χ_N^2 называется распределением *хи-квадрат с N степенями свободы*. Распределение случайной величины T_N называется *t-распределением* или *распределением Стьюдента с N степенями свободы*.

Обозначим через χ_α^- и χ_α^+ нижнюю и верхнюю двусторонние квантили (критические точки) для распределения хи-квадрат с N степенями свободы при уровне значимости α , которые определяются соотношениями

$$\Pr\{\chi_N^2 \leq \chi_\alpha^-\} = \alpha/2, \quad \Pr\{\chi_N^2 \geq \chi_\alpha^+\} = \alpha/2, \quad \Pr\{\chi_\alpha^- < \chi_N^2 < \chi_\alpha^+\} = 1 - \alpha.$$

Для $N \leq 30$ и стандартных уровней значимости $\alpha = 0.001; 0.005; \dots, 0.10$ численные значения этих квантилей приведены в таблице **Table A.5**. Отметим формулы для математического ожидания $\mathbf{M}\chi_N^2$ и дисперсии $\mathbf{D}\chi_N^2$ распределения хи-квадрат с N степенями свободы, а также неравенства для численных значений рассматриваемых квантилей:

$$\mathbf{M}\chi_N^2 = N, \quad \mathbf{D}\chi_N^2 = 2N, \quad \chi_\alpha^- < N < \chi_\alpha^+.$$

Поскольку распределение $\mathcal{N}(0, 1)$ обладают симметрией относительно нуля, то аналогичная симметрия имеет место и для распределения Стьюдента. В частности, математическое ожидание $\mathbf{M}T_N = 0$. Пусть $t'_\alpha > 0$ обозначает двустороннюю квантиль распределения Стьюдента с N степенями свободы, которая определяется соотношениями

$$\Pr\{T_N \leq -t'_\alpha\} = \alpha/2, \quad \Pr\{T_N \geq t'_\alpha\} = \alpha/2, \quad \Pr\{-t'_\alpha < T_N < t'_\alpha\} = 1 - \alpha.$$

Для $N \leq 30$ и стандартных уровней значимости $\alpha = 0.001; 0.005; \dots, 0.10$ численные значения этой квантили приведены в таблице **Table A.4**.

Пример 3.1.1. Для $N = 5$ и $\alpha = 0.05, 0.10$ таблицы **Table A.4** и **Table A.5** дают следующие значения двусторонних квантилей

$$\alpha = 0.05; 1 - \alpha = 0.95 \implies t'_\alpha = 2.571 > 1.960 = x'_\alpha; \quad \chi_\alpha^- = 0.831, \quad \chi_\alpha^+ = 12.832,$$

$$\alpha = 0.10; 1 - \alpha = 0.90 \implies t'_\alpha = 2.015 > 1.645 = x'_\alpha; \quad \chi_\alpha^- = 1.145, \quad \chi_\alpha^+ = 11.07.$$

Другими словами, это означает, что

$$\Pr\{-2.57 < T_5 < 2.57\} = 0.95, \quad \Pr\{0.831 < \chi_5^2 < 12.83\} = 0.95,$$

$$\Pr\{-2.015 < T_5 < 2.015\} = 0.90 \quad \Pr\{1.145 < \chi_5^2 < 11.07\} = 0.90.$$

Пусть x'_α – двусторонняя квантиль распределения $\mathcal{N}(0, 1)$. Таблица численных значений x'_α при $\alpha = 0.001; 0.005; \dots, 0.10$ была вычислена в задании 2. Можно показать, что для любого $N \geq 2$ квантиль $t'_\alpha > x'_\alpha$. Кроме того, если $N \rightarrow \infty$, то:

- для вычисления двусторонних квантилей $\chi_\alpha^\pm$ применима основанная на центральной предельной теореме приближенная формула (см. задание 2, раздел 2.3), которая для распределения хи-квадрат с N степенями свободы имеет вид

$$\chi_\alpha^\pm \approx \mathbf{M}\chi_N^2 \pm x'_\alpha \cdot \sqrt{\mathbf{D}\chi_N^2} = N \pm x'_\alpha \cdot \sqrt{2N},$$

- случайная величина $t_N \rightarrow \xi_0 \sim \mathcal{N}(0, 1)$ и поэтому при больших значениях N двусторонняя квантиль $t'_\alpha \approx x'_\alpha$, что видно из численных значений в таблице **Table A.4**.

3.1.4 Точечные оценки параметров

По наблюдениям $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ вычисляются выборочное среднее $\bar{x}$ и выборочное среднеквадратичное отклонение s :

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}; \quad s = \sqrt{\frac{S^2}{n-1}}, \quad \text{где} \quad S^2 \triangleq \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = s^2 \cdot (n-1). \quad (1)$$

Данные величины (статистики), которые были введены в задании 2, называются *точечными оценками* соответствующих теоретических параметров a и σ . В следующем разделе приводятся рецепты построения доверительных интервалов, т.е. *интервальных оценок*, для a и σ . В этих рецептах используются введенные выше обозначения $\chi_\alpha^\pm$, t'_α двусторонних квантилей распределений хи-квадрат и Стьюдента с $N = n - 1$ степенями свободы.

3.1.5 Доверительный интервал для среднеквадратичного отклонения σ

Можно доказать, что справедливо равенство

$$\Pr \left\{ \sqrt{\frac{S^2}{\chi_\alpha^+}} < \sigma < \sqrt{\frac{S^2}{\chi_\alpha^-}} \right\} = \Pr \left\{ s \cdot \sqrt{\frac{n-1}{\chi_\alpha^+}} < \sigma < s \cdot \sqrt{\frac{n-1}{\chi_\alpha^-}} \right\} = 1 - \alpha.$$

Поэтому при коэффициенте доверия $1 - \alpha$ получаем рецепт построения границ доверительного интервала для параметра σ :

$$\sigma_\alpha^- = \sqrt{\frac{S^2}{\chi_\alpha^+}} = s \cdot \sqrt{\frac{n-1}{\chi_\alpha^+}}, \quad \sigma_\alpha^+ = \sqrt{\frac{S^2}{\chi_\alpha^-}} = s \cdot \sqrt{\frac{n-1}{\chi_\alpha^-}}, \quad s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n-1}} \quad (2)$$

Пример 3.1.2. Пусть выборку $x_1 = 198$, $x_2 = 165$, $x_3 = 183$, $x_4 = 183$, $x_5 = 187$, $x_6 = 191$ составляют первые $n = 6$ наблюдений выборки объёма $n = 20$ из задания 2. Вычисления по формулам (1), проведенные для данной выборки объёма $n = 6$, дают значения выборочных характеристик: $\bar{x} = 184$ и $s = 11$. Согласно вычислениям примера 3.1.1, получаем левый и правый концы доверительных интервалов для параметра σ :

$$\alpha = 0.05 \implies \sigma_\alpha^- = s \cdot \sqrt{\frac{n-1}{\chi_\alpha^+}} = 11 \cdot \sqrt{\frac{5}{12.832}} = 7, \quad \sigma_\alpha^+ = s \cdot \sqrt{\frac{n-1}{\chi_\alpha^-}} = 11 \cdot \sqrt{\frac{5}{0.831}} = 27$$

$$\alpha = 0.10 \implies \sigma_\alpha^- = s \cdot \sqrt{\frac{n-1}{\chi_\alpha^+}} = 11 \cdot \sqrt{\frac{5}{11.07}} = 7, \quad \sigma_\alpha^+ = s \cdot \sqrt{\frac{n-1}{\chi_\alpha^-}} = 11 \cdot \sqrt{\frac{5}{1.145}} = 23.$$

Следовательно, 95%-ый и 90%-ый доверительные интервалы для теоретического среднеквадратичного отклонения σ , построенные по выборке объёма $n = 6$, имеют вид:

$$\Pr \{7 < \sigma < 27\} = 0.95, \quad \Pr \{7 < \sigma < 23\} = 0.90.$$

Замечание 3.1. В вычислениях этого примера, как и во всех дальнейших аналогичных расчётах, результаты вычислений выборочных характеристик округляются, например, пишем: $\bar{x} = 184$, $s = 11$, $\sigma_{\alpha}^{-} = 7$, $\sigma_{\alpha}^{+} = 27$, т.е. округляем с точностью до 1 микросекунды. При этом мы учитываем следующее важное общепринятое *правило* по поводу точности проведения вычислений, а именно: результаты вычисления выборочных характеристик, имеющих размерность, совпадающую с размерностью опытных данных, надо указывать *с той же самой точностью, с которой измерялись в опыте элементы выборки*. В опытах исходные измерения длины интервала между разрядами нейрона, приведенные в разделе 2.6 задания 2, проводились с точностью до 1 микросекунды. Поэтому в данном случае «знаки после запятой», формально появляющиеся при вычислении выборочных характеристик, надо округлять, не внося их в итоговые таблицы выводов.

Замечание 3.2. Если параметр a известен, то для построения доверительного интервала для неизвестного параметра σ в формулах (2) надо сделать следующие изменения:

- статистику S^2 заменить на $\sum_{i=1}^n (x_i - a)^2$, другими словами, в формуле (2) в определении статистики s величину $\bar{x}$ заменить на a .
- квантили $\chi_{\alpha}^{\pm}$ распределения хи-квадрат с $n - 1$ степенями свободы заменить на соответствующие квантили распределения хи-квадрат с n степенями свободы.

3.1.6 Доверительный интервал для среднего значения a

Если t'_{α} - двусторонняя квантиль распределения Стьюдента с $N = n - 1$ степенями свободы, то можно показать, что вероятность

$$\Pr \{|\bar{x} - a| < \epsilon_{\alpha}\} = \Pr \{\bar{x} - \epsilon_{\alpha} < a < \bar{x} + \epsilon_{\alpha}\} = 1 - \alpha, \quad (3)$$

где $\epsilon_{\alpha} \triangleq \frac{s \cdot t'_{\alpha}}{\sqrt{n}}$ называется *радиусом* доверительного интервала с *центром* $\bar{x}$.

Отсюда получаем следующий рецепт построения границ доверительного интервала $(a_{\alpha}^{-}; a_{\alpha}^{+})$ для параметра a с коэффициентом доверия $1 - \alpha$:

$$a_{\alpha}^{-} \triangleq \bar{x} - \epsilon_{\alpha}, \quad a_{\alpha}^{+} \triangleq \bar{x} + \epsilon_{\alpha}, \quad \epsilon_{\alpha} \triangleq \frac{s \cdot t'_{\alpha}}{\sqrt{n}}. \quad (4)$$

Пример 3.1.3. Для выборки объёма $n = 6$ из примера 3.1.2, используя приведенные в примере 3.1.1 значения двусторонних квантилей распределения Стьюдента t'_{α} с $n - 1 = 5$ степенями свободы и учитывая правило округления из замечания 3.1, можем написать:

$$\begin{aligned} \alpha = 0.05 &\implies \epsilon_{\alpha} = \frac{s \cdot t'_{\alpha}}{\sqrt{n}} = \frac{11 \cdot 2.571}{\sqrt{5}} = 13 \implies \\ \implies a_{\alpha}^{-} = \bar{x} - \epsilon_{\alpha} = 184 - 13 = 171, & \quad a_{\alpha}^{+} = \bar{x} + \epsilon_{\alpha} = 184 + 13 = 197; \\ \alpha = 0.10 &\implies \epsilon_{\alpha} = \frac{s \cdot t'_{\alpha}}{\sqrt{n}} = \frac{11 \cdot 2.015}{\sqrt{5}} = 10 \implies \\ \implies a_{\alpha}^{-} = \bar{x} - \epsilon_{\alpha} = 184 - 10 = 174, & \quad a_{\alpha}^{+} = \bar{x} + \epsilon_{\alpha} = 184 + 10 = 194. \end{aligned}$$

Следовательно, 95%-ый и 90%-ый доверительные интервалы для теоретического среднего значения a , построенные по выборке объёма $n = 6$, имеют вид:

$$\Pr \{171 < a < 197\} = 0.95, \quad \Pr \{174 < a < 194\} = 0.90.$$

Замечание 3.3. Если параметр σ известен, то для построения доверительного интервала для неизвестного параметра a в формулах (3)-(4) надо сделать следующие изменения:

- величину s заменить на σ ,
- квантиль распределения Стьюдента с $n - 1$ степенями свободы t_α заменить на соответствующую двустороннюю квантиль стандартного нормального распределения x'_α . Напомним, что $x'_\alpha < t'_\alpha$ для любого $n \geq 2$.

При этом центр интервала $\bar{x}$ не изменится, а изменённый радиус доверительного интервала надо вычислять по формуле $\epsilon_\alpha = \frac{\sigma x'_\alpha}{\sqrt{n}}$.

3.2 Доверительный интервал для среднего значения a в непараметрической модели

3.2.1 Математическая модель

Непараметрическая модель n независимых наблюдений $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ с общим теоретическим (неизвестным) средним значением $a = \mathbf{M}x_i$, $i = 1, 2, \dots, n$, записывается в виде

$$x_i = a + e_i, \quad \mathbf{M}e_i = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (**)$$

Независимые случайные величины $\mathbf{e} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ называются *ошибками наблюдений* $\mathbf{x}$. Случайная величина e_i , $i = 1, 2, \dots, n$, называется ошибкой наблюдения x_i , $i = 1, 2, \dots, n$. Распределения $F_i(t) = \text{Pr}\{e_i < t\}$ (не обязательно одинаковые) независимых ошибок наблюдений предполагаются *непрерывными* и *симметричными относительно нуля*, т.е. *плотности* этих распределений $p_i(t) = F'_i(t)$ являются *чётными* функциями. Отметим, что (неизвестное) распределение вероятностей $F_i(t)$ не обязательно является нормальным, т.е. *параметрическим*, распределением $\mathcal{N}(0, \sigma_i)$, зависящим лишь от параметра σ_i .

3.2.2 Точечная оценка параметра a

Пусть $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ – исходные наблюдения непараметрической модели (**). Для каждой пары целых чисел (i, j) , $1 \leq i \leq j \leq n$, обозначим через

$$\Sigma_{ij} \triangleq \frac{x_i + x_j}{2} = a + \frac{e_i + e_j}{2}, \quad 1 \leq i \leq j \leq n,$$

полусумму соответствующих наблюдений. Эти полусуммы удобно представить в форме треугольной $(n \times n)$ -таблицы (матрицы) $\|\Sigma_{ij}\|$, на диагонали которой выписаны сами наблюдения $\Sigma_{ii} = x_i$, $i = 1, 2, \dots, n$, а выше диагонали в соответствующих клетках располагаются полусуммы Σ_{ij} , $i < j$.

Пример 3.2.1. Для частного случая $n = 6$ треугольная (6×6) -таблица имеет вид:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_1	$\Sigma_{11} = x_1$	$\Sigma_{12} = \frac{x_1+x_2}{2}$	$\Sigma_{13} = \frac{x_1+x_3}{2}$	$\Sigma_{14} = \frac{x_1+x_4}{2}$	$\Sigma_{15} = \frac{x_1+x_5}{2}$	$\Sigma_{16} = \frac{x_1+x_6}{2}$
x_2	–	$\Sigma_{22} = x_2$	$\Sigma_{23} = \frac{x_2+x_3}{2}$	$\Sigma_{24} = \frac{x_2+x_4}{2}$	$\Sigma_{25} = \frac{x_2+x_5}{2}$	$\Sigma_{26} = \frac{x_2+x_6}{2}$
x_3	–	–	$\Sigma_{33} = x_3$	$\Sigma_{34} = \frac{x_3+x_4}{2}$	$\Sigma_{35} = \frac{x_3+x_5}{2}$	$\Sigma_{36} = \frac{x_3+x_6}{2}$
x_4	–	–	–	$\Sigma_{44} = x_4$	$\Sigma_{45} = \frac{x_4+x_5}{2}$	$\Sigma_{46} = \frac{x_4+x_6}{2}$
x_5	–	–	–	–	$\Sigma_{55} = x_5$	$\Sigma_{56} = \frac{x_5+x_6}{2}$
x_6	–	–	–	–	–	$\Sigma_{66} = x_6$

Заметим, что число полусумм в треугольной $(n \times n)$ -таблице, обозначаемое в дальнейшем символом N , вычисляется по формуле $N = 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$. Запишем получившиеся N элементов треугольной таблицы, каждый из которых можно интерпретировать как *оценку* неизвестного параметра a , в *неубывающем* порядке

$$\Sigma^1 \leq \Sigma^2 \leq \dots \leq \Sigma^N, \quad N = \frac{n(n+1)}{2},$$

т.е. образуем из них *вариационный ряд*. Наиболее простой графический способ получения вариационного ряда состоит в изображении рассматриваемых полусумм на подходящим образом выбранной числовой оси.

В качестве *непараметрической точечной оценки* параметра a рассматривается *медиана* $\hat{a}$ вариационного ряда полусумм, которая определяется как число, наиболее близкое к центру данного вариационного ряда. Более точно,

$$\hat{a} = \text{med} \{ \Sigma^1 \leq \Sigma^2 \leq \dots \leq \Sigma^N \} \triangleq \begin{cases} \Sigma^{(N+1)/2}, & \text{если } N\text{-нечётно,} \\ \frac{\Sigma^{N/2} + \Sigma^{N/2+1}}{2}, & \text{если } N\text{-чётно.} \end{cases}$$

Преимущество медианы $\hat{a}$ по сравнению с выборочным средним $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$ состоит в том, что медиана существенно меньше, чем $\bar{x}$, может зависеть от *выбросов* (грубых ошибок) в измерениях, т.е. от относительно *очень больших* (или относительно *очень малых*) чисел среди наблюдений $x_1, x_2, \dots, x_n$.

При решении задачи проверки гипотез и задачи построения доверительного интервала для неизвестного a по наблюдениям $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ в непараметрической модели (**) используются определяемые в следующем разделе характеристики наблюдений $\mathbf{x}$, называемые *ранговыми статистиками*.

3.2.3 Ранговые статистики

Пусть $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ – произвольные n наблюдений.

- Запишем $\mathbf{x}$ в порядке неубывания: $x^1 \leq x^2 \leq \dots \leq x^n$, т.е. образуем из результатов измерений $x_1, x_2, \dots, x_n$ *вариационный ряд*. Измерению x_i , $i = 1, 2, \dots, n$, поставим в соответствие число $R_i(\mathbf{x})$, $1 \leq R_i(\mathbf{x}) \leq n$, которое называется *рангом* x_i и вычисляется по следующему правилу:

- если значение x_i встречается среди наблюдений $\mathbf{x}$ *ровно один раз*, то его рангом $R_i(\mathbf{x})$ называется *порядковый номер* наблюдения x_i в вариационном ряду;
- если число x_i встречается среди наблюдений $\mathbf{x}$ *два раза или более*, то его рангом называется *среднее арифметическое значение порядковых номеров* членов вариационного ряда, которые совпадают с x_i ;
- очевидно, что сумма всех рангов $\sum_{i=1}^n R_i(\mathbf{x}) = 1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

- Для *абсолютных величин* наблюдений $|\mathbf{x}| \triangleq (|x_1|, |x_2|, \dots, |x_n|)$ символом $R_i(|\mathbf{x}|)$ обозначим ранг $|x_i|$ в вариационном ряду, составленном из $|x_1|, |x_2|, \dots, |x_n|$.

- Каждому наблюдению x_i , $i = 1, 2, \dots, n$, сопоставим пару неотрицательных целых чисел $(x_i^+; x_i^-)$, где

$$x_i^+ \triangleq \begin{cases} 0, & \text{если } x_i \leq 0, \\ R_i(|\mathbf{x}|), & \text{если } x_i > 0, \end{cases} \quad x_i^- \triangleq \begin{cases} 0, & \text{если } x_i > 0, \\ R_i(|\mathbf{x}|), & \text{если } x_i \leq 0, \end{cases}$$

и введём функции наблюдений $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$:

$$W^+(\mathbf{x}) \triangleq \sum_{i=1}^n x_i^+ \quad \text{и} \quad W^-(\mathbf{x}) \triangleq \sum_{i=1}^n x_i^-,$$

называемые *знаково-ранговыми статистиками Вилкоксона*.

Пример 3.2.2. Промежуточные вычисления ранговых статистик для $n = 10$ наблюдений $\mathbf{x} = (4, 2, 3, -4, -1, 5, 0, 6, 7, 6)$ показывает следующая таблица:

i	x_i	$R_i(\mathbf{x})$	$ x_i $	$R_i(\mathbf{x})$	x_i^+	x_i^-
1	4	6	4	5.5	5.5	0
2	2	4	2	3	3	0
3	3	5	3	4	4	0
4	-4	1	4	5.5	0	5.5
5	-1	2	1	2	0	2
6	5	7	5	7	7	0
7	0	3	0	1	0	1
8	6	8.5	6	8.5	8.5	0
9	7	10	7	10	10	0
10	6	8.5	6	8.5	8.5	0

Второй столбец таблицы содержит выбранные нами для примера числовые значения исходных 10 наблюдений $\mathbf{x}$. Третий столбец даёт ранги наблюдений $\mathbf{x}$ и легко проверить, что сумма рангов $N = \frac{10 \cdot 11}{2} = 55$. Четвёртый столбец содержит наблюдения $|x_i|$, а пятый – их ранги, на основании которых вычисляются числа x_i^+ и (x_i^-) , указанные в 6-ом и 7-ом столбцах. Суммируя значения x_i^+ (x_i^-) в 6-ом (7-ом) столбце, находим знаково - ранговую статистику Вилкоксона $W^+(\mathbf{x})$ ($W^-(\mathbf{x})$):

$$W^+(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n x_i^+ = 3 + 4 + 5.5 + 7 + 8.5 + 8.5 + 10 = 46.5, \quad W^-(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n x_i^- = 1 + 2 + 5.5 = 8.5.$$

Заметим, что сумма данных статистик $W^+(\mathbf{x}) + W^-(\mathbf{x}) = 46.5 + 8.5 = 55 = N$.

Последнее равенство $W^+(\mathbf{x}) + W^-(\mathbf{x}) = N$ имеет место в общем случае произвольных наблюдений $\mathbf{x}$. В практических расчетах это равенство всегда используется для проверки правильности вычисления по отдельности статистик $W^+(\mathbf{x})$ и $W^-(\mathbf{x})$.

3.2.4 Знаково-ранговое распределение Вилкоксона

Можно показать, что для ошибок наблюдений $\mathbf{e} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ в модели (**) знаково-ранговые статистики $W^+(\mathbf{e})$ и $W^-(\mathbf{e})$ являются случайными величинами, имеющими одно и то же распределение вероятностей, зависящее лишь от объёма наблюдений n и называемое *знаково-ранговым распределением Вилкоксона*. Это распределение, которое в дальнейшем, для краткости, будем называть *распределением Вилкоксона*, соответствует случайной величине W_n , определяемой в виде суммы $W_n \triangleq \sum_{i=1}^n w_i$, где слагаемые w_i , $i = 1, 2, \dots, n$, являются независимыми случайными величинами с распределениями

$$q_i(x) \triangleq \Pr\{w_i = x\} \triangleq \begin{cases} 1/2, & \text{если } x = 0, \\ 1/2, & \text{если } x = i, \\ 0, & \text{для других значений } x. \end{cases}$$

Случайная величина W_n принимает целочисленные неотрицательные значения. Диапазон возможных значений, принимаемых этой величиной, а также её математическое ожидание (среднее значение) $\mathbf{M}W_n$ и дисперсия $\mathbf{D}W_n$ задаются соотношениями

$$0 \leq W_n \leq \frac{n(n+1)}{2}, \quad \mathbf{M}W_n = \frac{n(n+1)}{4}, \quad \mathbf{D}W_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{24}.$$

Кроме того, распределение Вилкоксона *симметрично* относительно своего среднего значения $\mathbf{M}W_n = \frac{n(n+1)}{4}$, т.е. для любого x , $0 \leq x \leq \frac{n(n+1)}{2}$, вероятность

$$\Pr\{W_n = x\} = \Pr\left\{W_n = \frac{n(n+1)}{2} - x\right\}.$$

При $0 \leq x \leq \frac{n(n+1)}{4}$ вероятность $\Pr\{W_n = x\}$ монотонно возрастает и достигает своего максимального значения при x , равном целой части числа $\frac{n(n+1)}{4}$. При $\frac{n(n+1)}{4} \leq x \leq \frac{n(n+1)}{2}$ вероятность $\Pr\{W_n = x\}$ монотонно убывает.

Обозначим через w_α^- и w_α^+ – нижнюю и верхнюю двусторонние квантили распределения Вилкоксона, соответствующие уровню значимости α . Нижняя двусторонняя квантиль w_α^- определяется неравенствами

$$\Pr\{W_n \leq w_\alpha^-\} \leq \frac{\alpha}{2}, \quad \Pr\{W_n \leq w_\alpha^- + 1\} > \frac{\alpha}{2},$$

а аналогичные неравенства, определяющие верхнюю двустороннюю квантиль w_α^+ , имеют вид

$$\Pr\{W_n \geq w_\alpha^+\} \leq \frac{\alpha}{2}, \quad \Pr\{W_n \geq w_\alpha^+ - 1\} > \frac{\alpha}{2}.$$

В силу симметрии распределения Вилкоксона, верхняя и нижняя квантили связаны равенством

$$w_\alpha^- + w_\alpha^+ = \frac{n(n+1)}{2} \implies w_\alpha^+ = \frac{n(n+1)}{2} - w_\alpha^-.$$

Если $n \leq 30$, то для уровней значимости $\alpha = 0.02; 0.05; 0.10$ численные значения нижней двусторонней квантили w_α^- распределения Вилкоксона указаны в таблице **Table A.16**.

Пример 3.2.3. При $n = 6$ и $n = 17$ таблица **Table A.16** применяется следующим образом.

- Если $n = 6$, то $\frac{n(n+1)}{2} = 6 \cdot 7/2 = 21$ и 6-ая строка **Table A.16** даёт

$$w_{0.05}^- = 1 \implies w_{0.05}^+ = 21 - 1 = 20, \quad w_{0.10}^- = 2 \implies w_{0.10}^+ = 21 - 2 = 19.$$

- Если $n = 17$, то $\frac{n(n+1)}{2} = 17 \cdot 18/2 = 153$ и 17-ая строка **Table A.16** даёт

$$w_{0.05}^- = 35 \implies w_{0.05}^+ = 153 - 35 = 118, \quad w_{0.10}^- = 41 \implies w_{0.10}^+ = 153 - 41 = 112.$$

Если $n > 30$ и x'_α – двусторонняя квантиль стандартного нормального распределения $\mathcal{N}(0, 1)$, то для вычисления двусторонних квантилей $w_\alpha^\pm$ можно использовать основанную на центральной предельной теореме приближённую формулу (см. задание 2, раздел 2.3), которая для распределения Вилкоксона имеет вид

$$\begin{aligned} w_\alpha^\pm &\approx \text{MW}_n \pm x'_\alpha \sqrt{\text{DW}_n} = \\ &= \underbrace{\frac{n(n+1)}{4} \pm x'_\alpha \sqrt{\frac{n(n+1)(2n+1)}{24}}}_{n=17, \alpha=0.10} = 76.5 \pm 1.65 \cdot 21.12 \implies w_\alpha^- = 42, w_\alpha^+ = 111. \end{aligned} \quad (5)$$

Сравнение этих приближённых значений двусторонних квантилей с указанными выше их табличными (из **Table A.16**) значениями показывает достаточно хорошую степень точности приближённой формулы (5) даже для $n = 17$.

3.2.5 Непараметрический доверительный интервал параметра a

Если при данном α нижняя двусторонняя квантиль $w_\alpha^- \geq 1$ (или верхняя двусторонняя квантиль $w_\alpha^+ \leq N - 1$), то для непараметрической модели наблюдений раздела 3.2.1 можно показать, что вероятность

$$\Pr\{\Sigma^{w_\alpha^-} < a < \Sigma^{w_\alpha^+ + 1}\} \geq 1 - \alpha. \quad (6)$$

Отсюда получаем следующий рецепт построения концов доверительного интервала для параметра a с коэффициентом доверия $1 - \alpha$:

$$a_\alpha^- = \Sigma^{w_\alpha^-}, \quad a_\alpha^+ = \Sigma^{w_\alpha^+ + 1}.$$

Эти формулы означают, что левый конец доверительного интервала a_α^- является членом вариационного ряда полусумм с номером w_α^- , а правый конец доверительного интервала a_α^+ является членом вариационного ряда полусумм с номером $w_\alpha^+ + 1$. Можно заметить, что правый конец доверительного интервала a_α^+ при обратном отсчёте с конца вариационного ряда имеет порядковый номер w_α^- .

Пример 3.2.4. Пусть выборку $x_1 = 198, x_2 = 165, x_3 = 183, x_4 = 183, x_5 = 187, x_6 = 191$, которая в примере 3.1.3 использовалась для иллюстрации параметрической модели, составляют первых $n = 6$ наблюдений выборки объёма $n = 20$ из задания 2. Для данной выборки объёма $n = 6$ число полусумм $N = \frac{n(n+1)}{2} = 21$ и расчёт доверительного интервала по формуле (6) описывается следующим образом.

1. Треугольная (6×6) -таблица полусумм Σ_{ij} в примере 3.2.1 заполняется следующим образом:

	198	165	183	183	187	191
198	198	181.5	190.5	190.5	192.5	194.5
165	-	165	174	174	176	179.5
183	-	-	183	183	185	187
183	-	-	-	183	185	187
187	-	-	-	-	187	189
191	-	-	-	-	-	191

2. Вариационный ряд полусумм (***) имеет вид: 165, 174, 174, 176, 179.5, 181.5, 183, 183, 183, 185, **185**, 187, 187, 187, 189, 190.5, 190.5, 191, 192.5, 194.5, 198, т.е.

$$\Sigma^1 = 165, \quad \Sigma^2 = 174, \quad \Sigma^3 = 174, \quad \dots \quad \Sigma^{20} = 194.5, \quad \Sigma^{21} = 198.$$

3. Медиана вариационного ряда $\Sigma^{11} = 185$ отмечена жирным шрифтом.
4. Рецепт (6) и найденные в примере 3.2.3 для $n = 6$, $\alpha = 0.05$ и $\alpha = 0.10$ нижние двусторонние квантили w_{α}^- распределения Вилкоксона дают следующие доверительные интервалы для параметра a с коэффициентами доверия $1 - \alpha = 0.95$ и $1 - \alpha = 0.90$:

$$\Pr\{\Sigma^1 < a < \Sigma^{21}\} = \Pr\{165 < a < 198\} \geq 0.95,$$

$$\Pr\{\Sigma^2 < a < \Sigma^{20}\} = \Pr\{174 < a < 195\} \geq 0.90.$$

которые лишь немного шире аналогичных параметрических доверительных интервалов, построенных в примере 3.1.3.

3.3 Вычисление доверительных интервалов для выборки объёма $n = 17$

По выборке объёма $n = 17$ из условия задания 2 вычисляются следующие числовые значения выборочного среднего $\bar{x}$, выборочного среднеквадратичного s , и медианы $\hat{a}$ вариационного ряда, состоящего из $N = 17 \cdot 18/2 = 153$ полусумм.

$$\bar{x} = 170, \quad s = 11, \quad \hat{a} = \Sigma^{77} = 170.$$

Итоги расчёта доверительных интервалов для σ приведём в виде таблицы:

Модель	α	0.02	0.04	0.10
$\mathcal{N}(a, \sigma)$ $a = \bar{x} = 170$ известно	χ_{α}^{-}	6.408	7.255	8.672
	χ_{α}^{+}	33.41	30.99	27.59
	σ_{α}^{-}	8	8	8
	σ_{α}^{+}	17	16	15
$\mathcal{N}(a, \sigma)$ a неизвестно	χ_{α}^{-}	5.812	6.614	7.962
	χ_{α}^{+}	32.00	29.63	26.30
	σ_{α}^{-}	8	8	9
	σ_{α}^{+}	18	17	16

Верхняя часть таблицы даёт границы доверительных интервалов для σ , когда параметр a предполагается известным. Нижняя часть таблицы даёт (более широкие) доверительные интервалы для σ при неизвестном a .

Итоговая таблица доверительных интервалов для a имеет вид:

Модель	α	0.01	0.05	0.10
$\mathcal{N}(a, \sigma)$ $\sigma = s = 11$ известно	x'_{α}	2.58	1.96	1.65
	ϵ_{α}	7	5	4
	a_{α}^{-}	163	165	166
	a_{α}^{+}	177	175	174
$\mathcal{N}(a, \sigma)$ σ неизвестно	t_{α}^{-}	2.92	2.12	1.74
	ϵ_{α}	8	6	5
	a_{α}^{-}	162	164	165
	a_{α}^{+}	178	176	175
Непараметрическая	w_{α}^{-}	23	34	41
	a_{α}^{-}	162	163	165
	a_{α}^{+}	179	176	176

Таблица состоит из трёх частей. Верхняя и средняя часть таблицы относятся к модели нормальной выборки раздела 3.1.1 с теоретическим распределением $\mathcal{N}(a, \sigma)$. Верхняя (средняя) часть таблицы даёт границы доверительных интервалов для a , когда параметр σ является известным (неизвестным). Нижняя часть таблицы указывает (более широкие) доверительные интервалы для a , если для исходных данных рассматривается непараметрическая модель раздела 3.2.1

В предыдущем задании 2 было получено хорошее согласование рассматриваемой здесь выборки объёма $n = 17$ с нормальным распределением. В этом случае, как показывает сравнение доверительных интервалов, доверительные интервалы, построенные по непараметрической модели, практически совпадают (они лишь чуть шире) с параметрическими доверительными интервалами.

3.4 Условия задания 3

I. В качестве исходных данных взять результаты наблюдений, которые представляют собой две укороченные выборки с объёмами $n \geq 10$ и $m \geq 12$, выделенные для обработки в задании 2. Для каждой из этих двух выборок выполнить следующее.

1. Провести обработку наблюдений по параметрической модели $\mathcal{N}(a, \sigma)$:
 - (a) вычислить выборочные характеристики $(\bar{x}, s)$ и привести таблицу обработки, показывающую способ расчёта этих характеристик;
 - (b) вычислить доверительные интервалы для теоретических параметров в ситуациях, когда один или оба параметра неизвестны.
2. Провести обработку наблюдений по непараметрической модели:
 - (a) выписать треугольную таблицу полусумм $\|\Sigma_{ij}\|$, $1 \leq i \leq j \leq n$;
 - (b) изобразить полусуммы в подходящем масштабе на числовой оси в виде вариационного ряда;
 - (c) с помощью полученного изображения вариационного ряда вычислить (и указать на числовой оси) медиану и концы доверительных интервалов.
3. Результаты расчётов привести в виде сводной таблицы, аналогичной таблице предыдущего раздела.

II. Изменить в данных $\mathbf{x} = (4, 2, 3, -4, -1, 5, 0, 6, 7, 6)$ примера раздела 3.2.3 значение наблюдения $x_4 = -4$. Положить, например, $x_4 = -2$ или $x_4 = -3$ или $x_4 = -6$. Вычислить и сравнить между собой получающиеся после таких изменений значения знаково-ранговых статистик $W^+(\mathbf{x})$ и $W^-(\mathbf{x})$.

Замечание. Знаково-ранговые статистики и односторонние квантили распределения Вилкоксона применяются (см. задание 4, раздел 4.3) для непараметрической модели наблюдений (**) при проверке гипотезы $\mathbf{H}_0 : a = 0$ против односторонней альтернативы $\mathbf{H}_1 : a > 0$ (или против односторонней альтернативы $\mathbf{H}_1 : a < 0$).