Задание 6

Линейный регрессионный анализ

6.1. Построение регрессионной прямой

Пусть экспериментатор, задавая значения *неслучайной* переменной t, в результате случайного опыта наблюдает значение *случайной* переменной x. Пусть проведено n опытов. Обозначим через t_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, значение переменной t, которое было задано в i-ом опыте, а через x_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, обозначим соответствующее значение случайной переменной x, которое было получено в i-ом опыте. Это означает, что результаты наблюдений представляют собой совокупность n пар чисел

$$(t_1, x_1), \quad (t_2, x_2), \quad \ldots \quad (t_n, x_n). \tag{$*$}$$

Для удобства, не нарушая общности, будем предполагать, что выбранные экспериментатором значения переменной t занумерованы в порядке возрастания, т.е. $t_1 < t_2 < \cdots < t_n$. Рассматриваемый далее в п. 6.4 пример $n = 7$ пар чисел взят из п. 6) Списка заданий.

Каждую пару чисел из $(*)$ можно интерпретировать как точку на плоскости в системе координат (t, x). Если из рисунка, где точки $(*)$ нанесены в системе координат (t, x), видна их "хорошая укладка" на прямую вида $x = c_0 + c_1 t$, то возникает задача *линейного регрессионного анализа* по построению прямой $x = \hat{c}_0 + \hat{c}_1 t$, *наилучшим* (по какому-либо критерию) *образом аппроксимирующей* точки $(*)$. Такая прямая называется *регрессионной* прямой. Её *угловой наклон* $\hat{c}_1$ и *сдвиг* $\hat{c}_0$ вычисляются как функции наблюдений $(*)$, т.е. являются *статистиками.*

Сначала мы опишем *два метода*, соответствующие разным критериям, вычисления углового наклона $\hat{c}_1$ и сдвига $\hat{c}_0$ регрессионной прямой. Затем рассмотрим вопрос о точности этих методов, т.е. используя соответствующие модели линейной зависимости со случайными ошибками, построим доверительные интервалы для теоретического углового наклона c_1 и теоретического сдвига c_0.

6.1.1. Метод наименьших квадратов Гаусса

В методе наименьших квадратов (МНК) вычисляется регрессионная прямая, для которой сумма квадратов расстояний по оси ординат от точек $(*)$ до регрессионной прямой минимальна. Следовательно, угловой наклон $\hat{c}_1$ и сдвиг $\hat{c}_0$, называемые оценками МНК, определяются как значения параметров c_1 и c_0, для которых достигается

$$\min_{(c_0, c_1)} \left\{ \sum_{i=1}^{n} (x_i - c_0 - c_1 t_i)^2 \right\} = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \hat{c}_0 - \hat{c}_1 t_i)^2 = \Delta^2.$$

Минимальное значение, которое мы обозначили символом Δ^2, называется *кажущейся ошибкой* МНК. Введём стандартные обозначения

$$\bar{t} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} t_i, \qquad \bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i.$$

Можно показать, что оценки МНК вычисляются по формулам

$$\hat{c}_1 = \frac{R_{tx}}{S_t^2}, \qquad \hat{c}_0 = \bar{x} - \hat{c}_1 \bar{t}, \tag{1}$$

где

$$S_t^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(t_i - \bar{t})^2, \qquad R_{tx} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(t_i - \bar{t}) \cdot x_i. \tag{2}$$

Отметим, что формула для R_{tx} может быть также записана следующими двумя способами

$$R_{tx} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(t_i - \bar{t}) \cdot (x_i - \bar{x}) \;=\; \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} t_i \cdot x_i \;-\; \bar{t}\bar{x}.$$

6.1.2. Метод угловых наклонов Тейла

Вычисление оценок $\hat{c}_1$ и $\hat{c}_0$ параметров регрессионной прямой c_1 и c_0 по методу угловых наклонов состоит из следующих этапов.

- Для пар (i, j), $1 \le i < j \le n$, общее число которых равно $N = n(n-1)/2$, вычислим *угловые наклоны*

  $$T_{ij} \triangleq \frac{x_j - x_i}{t_j - t_i}, \quad 1 \le i < j \le n, \tag{3a}$$

  которые для запоминания удобно записывать в клетки треугольной $n \times n$–таблицы (матрицы) $\|T_{ij}\|$. Диагональ и нижняя часть таблицы состоят из пустых клеток, а выше диагонали в соответствующих клетках написаны числа T_{ij}, $i < j$.

- Составим из полученных $N = n(n-1)/2$ угловых наклонов вариационный ряд $T^1 \le T^2 \le \cdots \le T^N$, для построения которого числа, записанные в клетках треугольной таблицы наносятся на числовую ось.

- В методе угловых наклонов оценка углового наклона регрессионной прямой определяется как медиана вариационного ряда угловых наклонов:

  $$\hat{c}_1 \triangleq \mathrm{med}\{T^1 \le T^2 \le \cdots \le T^N\} = \begin{cases} T^{(N+1)/2}, & \text{если } N\text{–нечётно,} \\ \frac{T^{N/2} + T^{N/2+1}}{2}, & \text{если } N\text{–чётно.} \end{cases} \tag{3b}$$

- Используя вычисленное значение оценки $\hat{c}_1$, для каждой пары наблюдений (t_i, x_i) определим величину $y_i \triangleq x_i - \hat{c}_1 t_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$ и, по аналогии с методом расчётов Задания 3, составим треугольную $n \times n$–таблицу из $N = n(n+1)/2$ полусумм этих величин:

  $$\Sigma_{ij} \triangleq \frac{y_i + y_j}{2}, \quad 1 \le i \le j \le n. \tag{4a}$$

- В методе угловых наклонов оценка сдвига регрессионной прямой определяется как медиана вариационного ряда полусумм:

  $$\hat{c}_0 \triangleq \mathrm{med}\{\Sigma^1 \le \Sigma^2 \le \cdots \le \Sigma^N\} = \begin{cases} \Sigma^{(N+1)/2}, & \text{если } N\text{–нечётно,} \\ \frac{\Sigma^{N/2} + \Sigma^{N/2+1}}{2}, & \text{если } N\text{–чётно.} \end{cases} \tag{4b}$$

6.2. Линейная регрессия с нормальными ошибками

6.2.1. Математическая модель

В параметрическом линейном регрессионном анализе в качестве *математической модели зависимости пары переменных* (t, x) *рассматривается линейная зависимость* $x = c_0 + c_1 t$ *со случайной нормальной ошибкой*, а именно:

$$x_i = c_0 + c_1 t_i + \sigma \xi_i, \quad \xi_i \sim \mathcal{N}(0,1), \quad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{5}$$

где c_0, c_1 и $\sigma > 0$ – фиксированные неизвестные параметры, x_i – известный результат i-ого измерения, при проведении которого экспериментатор выбрал значение переменной $t = t_i$, а случайные (неизвестные) величины ξ_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ имеют стандартное нормальное распределение и независимы.

Отметим, что в частном случае нулевого углового наклона $c_1 = 0$ параметрическая модель линейной регрессии (5) совпадает с моделью нормальной выборки из Задания 3.

6.2.2. Точечные оценки и доверительные интервалы параметров c_0, c_1 и $\sigma > 0$

В качестве *точечных* $(\hat{c}_0, \hat{c}_1)$ *оценок параметров* (c_0, c_1) выбираются оценки МНК, вычисляемые по формулам (1)-(2). *Точечная оценка* $\hat{\sigma}$ *среднеквадратичного отклонения* σ определяется с помощью кажущейся ошибки Δ^2:

$$\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{\Delta^2}{n-2}}, \quad \text{где} \quad \Delta^2 = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \hat{c}_0 - \hat{c}_1 t_i)^2. \tag{2$'$}$$

Можно показать, что из определения математической модели параметрической линейной регрессии (5) вытекают следующие утверждения, задающие правила построения доверительных интервалов.

- Пусть χ^+_α и χ^-_α – верхняя и нижняя двусторонние квантили распределения хи-квадрат с $n-2$ степенями свободы. Тогда $\Pr\left\{\sigma^-_\alpha < \sigma < \sigma^+_\alpha\right\} = 1 - \alpha$, где левый σ^-_α и правый σ^+_α концы доверительного интервала для параметра σ вычисляются по формулам

$$\sigma^-_\alpha = \sqrt{\frac{\Delta^2}{\chi^+_\alpha}}, \quad \sigma^+_\alpha = \sqrt{\frac{\Delta^2}{\chi^-_\alpha}}.$$

- Пусть $t_\alpha > 0$ обозначает верхнюю двустороннюю квантиль распределения Стьюдента с $n-2$ степенями свободы для уровня значимости α. Тогда

$$\Pr\left\{|c_0 - \hat{c}_0| < \epsilon^0_\alpha\right\} = 1 - \alpha, \qquad \Pr\left\{|c_1 - \hat{c}_1| < \epsilon^1_\alpha\right\} = 1 - \alpha,$$

где радиусы доверительных интервалов

$$\epsilon^0_\alpha = \frac{\hat{\sigma} \cdot t_\alpha}{\sqrt{n}} \cdot \sqrt{1 + \frac{\bar{t}^2}{n S_t^2}}, \qquad \epsilon^1_\alpha = \frac{\hat{\sigma} \cdot t_\alpha}{\sqrt{n S_t^2}}. \tag{6}$$

Следовательно, при коэффициенте доверия $1-\alpha$ концы доверительного интервала $(c_i^-;\ c_i^+)$, $i=0,1$, для параметра c_i вычисляются по формулам

$$c_i^- = \hat{c}_i - \epsilon_\alpha^i, \qquad c_i^+ = \hat{c}_i + \epsilon_\alpha^i, \qquad i=0,1.$$

6.3. Непараметрическая линейная регрессия

6.3.1. Математическая модель

Непараметрическая модель наблюдений $(*)$ в линейном регрессионном анализе записывается в виде:

$$x_i = c_0 + c_1 t_i + \gamma_i, \quad \mathbf{M}\gamma_i = 0, \quad i=1,2,\ldots,n, \tag{7}$$

где c_0 и c_1 неизвестные параметры, а ошибки наблюдений γ_i, $i=1,2,\ldots,n$ являются *независимыми одинаково распределёнными случайными величинами с нулевыми средними значениями.* Неизвестная функция распределения ошибок наблюдений $F(t)=\Pr\{\gamma_i<t\}$, $i=1,2,\ldots,n$, предполагается *непрерывной.* Данная модель *обобщает* параметрическую модель из п. 6.2, где ошибки наблюдений имели нормальное распределение вероятностей $F(t)=\mathcal{N}(0,\sigma)$, в котором неизвестным был лишь параметр σ. Отметим, что в частном случае нулевого углового наклона $c_1=0$ непараметрическая модель линейной регрессии (7) совпадает с непараметрической моделью выборки из Задания 3. Для построения доверительного интервала углового наклона c_1 используются двусторонние квантили дискретного распределения вероятностей, которое называется распределением Кендэла и вводится в следующем разделе.

6.3.2. Распределение Кендэла

Используя обозначения из п. 6.3.1, введём случайные величины

$$K_n^+ \stackrel{\triangle}{=} \text{число пар } (i,j) \text{ для которых: } 1\le i<j\le n,\ \gamma_i<\gamma_j,$$

$$K_n^- \stackrel{\triangle}{=} \text{число пар } (i,j) \text{ для которых: } 1\le i<j\le n,\ \gamma_i>\gamma_j.$$

Очевидно, $K_n^+ + K_n^- = n(n-1)/2$ и можно показать, что распределение вероятностей случайной величины K_n^+ совпадает с распределением вероятностей K_n^- и их общее распределение вероятностей, назывемое *распределением Кендэла*, не зависит от неизвестной функции распределения вероятностей ошибок $F(t)$, а зависит лишь от числа n.

Перечислим свойства распределения Кендэла:

- Распределению Кендэла соответствует следующий

  Случайный опыт. В урне имеется n жетонов, занумерованных числами от 1 до n. Все n жетонов поочерёдно извлекаются из урны и пусть

$$(k_1, k_2, \dots, k_n), \quad \text{где} \quad k_i = 1, 2, \dots, n,\ k_i \ne k_j,\ i \ne j,$$

обозначает последовательность (случайную перестановку) номеров извлечённых жетонов. Тогда распределение случайной величины

$$K_n \stackrel{\triangle}{=} \text{число пар } (i, j), \text{ для которых: } 1 \le i < j \le n,\ k_i < k_j,$$

совпадает с распределением Кендэла. Данную случайную величину называют случайной величиной Кендэла.

- Диапазон целочисленных значений случайной величины K_n её математическое ожидание и дисперсия записываются в виде

$$0 \le K_n \le \frac{n(n-1)}{2}, \quad \mathbf{M}K_n = \frac{n(n-1)}{4}, \quad \mathbf{D}K_n = \frac{n(n-1)(2n+5)}{72}.$$

- Аналогично распределениям Вилкоксона и Манна-Уитни, распределение Кендэла симметрично относительно среднего значения $\mathbf{M}K_n = \frac{n(n-1)}{4}$. Нижние и верхние квантили этого распределения будем обозначать символами k_α^- и k_α^+, соответственно. Например, *нижняя двусторонняя квантиль* k_α^- определяется неравенствами:

$$\Pr\{K_n \le k_\alpha^-\} \le \frac{\alpha}{2}, \quad \Pr\{K_n \le k_\alpha^- + 1\} > \frac{\alpha}{2}.$$

  Её числовые значения, которые используются при построении доверительного интервала углового наклона c_1, приведены в **Table K**.

- В силу указанной выше симметрии распределния Кендэла, его нижняя k_α^- и верхняя k_α^+ квантили связаны равенством $k_\alpha^- + k_\alpha^+ = \frac{n(n-1)}{2}$.

6.3.3. Непараметрический доверительный интервал для углового наклона c_1

Рассмотрим вариационный ряд $T^1 \le T^2 \le \cdots \le T^N$, $N = n(n-1)/2$, составленный из угловых наклонов (3a) для вычисления точечной оценки (3b) теоретического углового наклона c_1 в п. 6.1.2. Если нижняя двусторонняя квантиль распределения Кендэла $k_\alpha^- \ge 1$ (или верхняя $k_\alpha^+ \le N-1$), то можно показать, что для любого теоретического закона распределения ошибки наблюдений $F(t)$ справедливо неравенство

$$\Pr\left\{T^{k_\alpha^-} < c_1 < T^{k_\alpha^+ + 1}\right\} \ge 1 - \alpha.$$

Поэтому при коэффициенте доверия $1-\alpha$ имеем следующий рецепт построения границ доверительного интервала для углового наклона c_1 в непараметрической модели линейного регрессионного анализа:

$$c_1^- = T^{k_\alpha^-}, \quad c_1^+ = T^{k_\alpha^+ + 1}.$$

6.3.4. Непараметрический доверительный интервал для теоретического сдвига c_0

Рассмотрим вариационный ряд $\Sigma^1 \le \Sigma^2 \le \dots \le \Sigma^N$, $N = n(n+1)/2$, составленный из полусумм (4a) для вычисления точечной оценки (4b) теоретического сдвига c_0 в п. 6.1.2. Если введённая в Задании 3 нижняя двусторонняя квантиль распределения Вилкоксона $w_\alpha^- \ge 1$ (или верхняя $w_\alpha^+ \le N-1$), то при коэффициенте доверия $1-\alpha$ можно применить следующий рецепт построения границ доверительного интервала:

$$c_0^- = \Sigma^{w_\alpha^-}, \quad c_0^+ = \Sigma^{w_\alpha^+ + 1}.$$

Этот рецепт совпадает с рецептом доверительного интервала для теоретического среднего в непараметрической модели выборки, если в качестве элементов выборки взять величины $y_1, y_2, \dots, y_n$, определённые в п. 6.1.2.

6.4. Пример обработки данных по моделям линейного регрессионного анализа

Приведём процедуру обработки данных из п. 6) Списка заданий. На первом этапе делаются общие предварительные расчеты, которые представлены в таблице:

i	t_i	x_i	$t_i - \bar t$	$(t_i - \bar t)^2$	$(t_i - \bar t)x_i$	$(x_i - \hat c_0 - \hat c_1 t_i)^2$	y_i
1	0.2	0.47	-0.9	0.81	-0.423	0.00044	0.35
2	0.5	0.68	-0.6	0.36	-0.408	0.00037	0.39
3	0.8	0.86	-0.3	0.09	-0.258	0.00088	0.40
4	1.1	0.99	0	0	0	0.00010	0.35
5	1.4	1.21	0.3	0.09	0.363	0.00163	0.40
6	1.7	1.29	0.6	0.36	0.774	0.00243	0.30
7	2.0	1.53	0.9	0.81	1.377	0.00044	0.37
Σ	7.7	7.00	0	2.52	1.425	$\Delta^2 = 0.00629$	
	$\bar t = 1.1$	$\bar x = 1.00$	0	$S_t^2 = 0.36$	$R_{tx} = 0.20357$	$\hat\sigma = 0.03547$	

Для вычисления чисел $y_i = x_i - \hat c_1 t_i$ из последнего столбца таблицы используется статистика $\hat c_1$, являющаяся медианой угловых наклонов. При расчётах значений $(x_i - \hat c_0 - \hat c_1 t_i)^2$ из предпоследнего столбца таблицы применяются статистики $\hat c_1$ и $\hat c_0$, являющиеся оценками (1)-(2) МНК.

6.4.1. Параметрическая обработка, МНК

С помощью данной таблицы, а также формул (1)-(2) и (2'), подсчитываются вспомогательные величины $\bar t = 1.1$, $\bar x = 1.00$, $S_t^2 = 0.36$, $R_{tx} = 0.20357$, а также вычисляются точечные оценки МНК для параметрической модели, кажущаяся ошибка МНК и оценка среднеквадратичного уклонения

$$\hat c_1 = 0.56548 \approx 0.57, \qquad \hat c_0 = 0.37789 \approx 0.38, \qquad \Delta^2 = 0.00629, \qquad \hat\sigma = 0.03547 \approx 0.04.$$

Затем по соответствующим формулам из п. 6.2.2. находятся приводимые ниже в общих сводных таблицах доверительные интервалы для неизвестных теоретических параметров σ, c_0 и c_1 из модели (5) параметрического регрессионного анализа.

6.4.2. Непараметрическая обработка по методу угловых наклонов

Этап 1. Выписывается треугольная таблица из $N = 7 \cdot 6/2 = 21$ угловых наклонов:

$i < j$	1	2	3	4	5	6	7
1	-	0.70	0.65	0.58	0.62	0.55	0.59
2		-	0.60	0.52	0.59	0.51	0.57
3			-	0.43	0.58	0.48	0.50
4				-	0.73	0.50	0.60
5					-	0.27	0.53
6						-	0.80
7							-

.

Этап 2. Строится вариационный ряд этих угловых наклонов:

0.27; 0.43; **0.48; 0.50; 0.51**; 0.52; 0.53; 0.55; 0.56; 0.57; **0.58**;
0.58; 0.59; 0.59; 0.60; 0.60; **0.62; 0.65; 0.70**; 0.73; 0.80,

где жирным шрифтом отмечены медиана и концы доверительных интервалов для c_1 при коэффициентах доверия 99%,95% и 90%.

Этап 3. С помощью медианы $\hat{c}_1 = 0.58$ вычисляются числа $y_1, y_2, \ldots, y_7$, указанные в последнем столбце вспомогательной таблицы, и выписывается треугольная таблица из $N = 7 \cdot 8/2 = 28$ полусумм этих чисел:

$i \le j$	1	2	3	4	5	6	7
1	0.35	0.37	0.375	0.35	0.375	0.325	0.36
2		0.39	0.395	0.37	0.395	0.345	0.38
3			0.40	0.375	0.40	0.35	0.385
4				0.35	0.375	0.325	0.36
5					0.40	0.35	0.385
6						0.30	0.335
7							0.37

Этап 4. Строится вариационный ряд полусумм:

0.30; **0.325; 0.325**; 0.335; 0.345; 0.35; 0.35; 0.35; 0.35; 0.35; 0.36; 0.36; 0.37; **0.37**;
0.37; 0.37; 0.375; 0.375; 0.375; 0.38; 0.385; 0.385; 0.39; 0.395; 0.395; **0.40; 0.40**; 0.40,

где жирным шрифтом отмечены два средних члены, совпадающих с медианой и концы доверительных интервалов для c_0 при коэффициентах доверия 95% и 90%.

6.4.3. Результаты вычислений

Подведём основные итоги обработки исходных $n = 7$ пар наблюдений по двум моделям линейного регрессионного анализа.

1). Получены точечные оценки теоретических параметров линейной регрессии:

a) для параметрической модели $\hat{c}_0 = 0.38, \quad \hat{c}_1 = 0.57, \quad \hat{\sigma} = 0.03547 \approx 0.04$;

b) для непараметрической модели $\hat{c}_0 = 0.37, \quad \hat{c}_1 = 0.58$.

2). В параметрической модели получены следующие доверительные интервалы для среднеквадратичного отклонения σ при коэффициентах доверия $1 - \alpha = 0.98,\ 0.96,\ 0.90$:

α	χ_α^-	χ_α^+	σ_α^-	σ_α^+
0.02	0.554	15.1	0.02	0.11
0.04	0.752	13.4	0.02	0.09
0.10	1.14	11.1	0.02	0.07

3). Доверительные интервалы для c_0 и c_1 при коэффициентах доверия 99%,95% и 90%: описываются приводимой ниже сводной таблицей:

α	Модель параметрическая							Модель непараметрическая					
	t_α	ϵ_α^0	c_0^-	c_0^+	ϵ_α^1	c_1^-	c_1^+	w_α^-	c_0^-	c_0^+	k_α^-	c_1^-	c_1^+
0.01	4.03	0.07	0.31	0.45	0.09	0.48	0.66	-	-	-	3	0.48	0.70
0.05	2.57	0.04	0.34	0.42	0.06	0.51	0.63	2	0.32	0.40	4	0.50	0.65
0.10	2.015	0.03	0.35	0.41	0.05	0.52	0.62	3	0.32	0.40	5	0.51	0.62

При вычислениях по формулам (6) радиусов доверительных интервалов ϵ_α^0 и ϵ_α^1, приведенных в данной таблице, вместо приближённого значения $\hat{\sigma} \approx 0.04$ использовалось полученное в промежуточных расчётах значение $\hat{\sigma} = 0.03547$.

Замечание. Сформулируем важные указания о точности, с которой надо округлять окончательные результаты, заносимые в итоговые таблицы.

1) Округления при вычисления чисел y_i, $\hat{c}_0$ и $\hat{\sigma}$, размерность которых совпадает с размерностью случайных наблюдений $x_i,\ i = 1, 2, \dots, n$, следует проводить с точностью абсолютной ошибки этих наблюдений.

2) Округления при вычислениях угловых наклонов T_{ij} и оценки $\hat{c}_1$ проводятся с точностью относительной ошибки наблюдений.

3) Округления результатов вычисления доверительных границ (радиусов и концов доверительных интервалов) проводятся с точностью абсолютной ошибки соответствующих точечных оценок.

6.5. Условия задания 6

Для самостоятельной обработки по рецептам линейного регрессионного анализа предлагается таблица из $n = 10$ пар наблюдений.

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
t_i	2	3	4	5	6	7	9	11	15	19
x_i	26.8	31.9	36.8	39.1	43.3	47.5	54.7	63.0	79.8	95.6

Из этой таблицы ”случайным образом” исключаются две пары измерений, а с оставшимися $n = 8$ парами надо сделать следующие расчёты:

1) на стандартном (А4) листе миллиметровой бумаги нарисовать $n = 8$ точек в системе координат (t, x), убедиться в том, что они ”хорошо укладываются ” на прямую и подобрать ”на глаз” с помощью прозрачной линейки ”графическую регрессионную прямую”, которая ”наилучшим образом” аппроксимирует эти $n = 8$ точек;

2) вычислить графически в системе координат (t, x) приближённые значения параметров нарисованной прямой $(\hat{c}_0, \hat{c}_1)$, которые затем следует учитывать для контроля грубых ошибок при расчётах;

3) провести обработку $n = 8$ пар наблюдений по схеме, описанной в п.6.4.

Для облегчения контроля правильности расчётов приведём значения основных оценок МНК, которые получаются при обработке полной таблицы из $n = 10$ пар наблюдений:

$$\bar{t} = 8.1, \qquad \bar{x} = 51.8, \qquad \hat{c}_1 = 4.00, \qquad \hat{c}_0 = 19.4, \qquad \hat{\sigma} \approx 0.7.$$