Статистическая интерпретация задач¹ на биномиальные вероятности

Задача 65.

В сказке о Василисе Премудрой Иван-царевич должен был 3 раза подряд угадать Василису среди её совершенно одинаковых сестёр (всего в семье 12 девушек). Как известно, Василиса подавала царевичу условные знаки, и поэтому он выдержал испытание. Слишком ли опасно ему было решиться на честное угадывание?

Проверяется гипотеза о *честности* Иван-царевича $\mathbf{H}_0 : p = p_0 = 1/12$, против альтернативы *нечестности* $\mathbf{H}_1 : p > p_0 = 1/12$ для $n = 3$ испытаний Бернулли, когда число успехов S_n есть число правильных ответов (угадываний) Иван-царевича. Вычислим уровни значимости (ошибки) α_B для возможных значений порога $B = 1, 2, 3$ при принятии решения в пользу $\mathbf{H}_1$. Другими словами, при пороге $B = 1$ альтернатива $\mathbf{H}_1$ принимается, если $S_n \geq 1$, т.е. если $S_n = 1, 2, 3$. При пороге $B = 2$ альтернатива $\mathbf{H}_1$ принимается если $S_n \geq 2$, т.е. если $S_n = 2, 3$. При пороге $B = 3$ альтернатива $\mathbf{H}_1$ принимается если $S_n \geq 3$, т.е. если $S_n = 3$. При этом, ошибку α_B напрасного отклонения гипотезы $\mathbf{H}_0$, в соответствии со здравым смыслом, определяют как верхний хвост биномиальной вероятности $\alpha_B \triangleq b_3(p_0, \geq B)$.

Для вычислений по таблице **Table A.1**, изменим условие сказки о Василисе Премудрой, положив $p_0 \triangleq 1/10 = 0.1$, что соответствует 10 одинаковым сёстрам. При значениях параметров $p_0 = 0.1$ и $n = 3$ выполним условия **Задания 1**, и представим отчет об этой работе в форме следующих таблиц.

r	$b_3(p_0, \leq r)$	$b_3(p_0, r)$	$b_3(p_0, \geq r)$
0	0.729	$(0.9)^3 = 0.729$	1.000
1	0.972	$0.243 = 0.972 - 0.729$	$0.271 = 1.000 - 0.729$
2	0.999	$0.027 = 0.999 - 0.972$	$0.028 = 1.000 - 0.972$
3	1.000	$(0.1)^3 = 0.001 = 1 - 0.999$	$0.001 = 1.000 - 0.999$

B	1	2	3	α	0.005	0.01	0.025	0.05	0.10
$\alpha_B \triangleq b_3(p_0, \geq B)$	0.271	0.028	0.001	B_α^+	3	3	3	2	2

В первой таблице для значений аргумента $r = 0, 1, 2, 3$ выписаны биномиальные вероятности $b_3(p_0, r)$ вместе их нижними хвостами $b_3(p_0, \leq r)$ и верхними хвостами $b_3(p_0, \geq r)$. Во второй таблице для значений порога $B = 1, 2, 3$ отмечены числовые значения ошибки α_B при принятии порогового решения в пользу $\mathbf{H}_1$. В третьей таблице по правилу из **Задания 1** вычислены числовые значения верхних квантилей B_α^+ при выборе соответствующих числовых значений ошибки (уровня значимости) α .

¹см. Артемьева Е.Ю. «Сборник задач по теории вероятностей и математической статистике для психологов». М., Из-во МГУ, 1969, (задачи No 65–75 на стр. 30-32).

Задача 66.

На круге радиуса R случайно и независимо друг от друга поставлено n точек. Будем считать проекцию поля зрения испытуемого на плоскость круга тоже кругом с тем же центром и радиусом r , где $r < R$. Найти вероятность того, что не меньше половины всех точек попадут в поле зрения испытуемого? Пусть, например, $r = 1$, $R = 2$, а $n = 5$ либо $n = 10$ либо $n = 15$.

Рассмотрим поиск *области сгущения* (или *разрежения*) *точечных объектов* на карте или фотоснимке. Поиск состоит в перемещении по снимку *прозрачной плёнки с нарисованными на ней двумя окружностями с общим центром и радиусами r и $R > r$* , которая называется *палеткой*. Пусть для некоторого фиксированного положения палетки n - число точечных объектов, попавших в большой круг, а S_n - число точечных объектов среди них, которые попали в малый круг. Гипотеза

$$\mathbf{H}_0 : p = p_0 = \frac{r^2}{R^2}$$

означает, что в малом круге распределение точечных объектов *равномерное*, а гипотеза

$$\mathbf{H}_1 : p > p_0 = \frac{r^2}{R^2} \quad \left(\mathbf{H}_1 : p < p_0 = \frac{r^2}{R^2} \right)$$

означает, что малый круг является областью сгущения (разрежения).

При $r = 1$, $R = 2$ и $n = 5$ отчет по проверке гипотезы

$$\mathbf{H}_0 : p = p_0 = \frac{r^2}{R^2} = 0.25$$

против альтернативы

$$\mathbf{H}_1 : p > p_0 = \frac{r^2}{R^2} = 0.25,$$

выполняемый по схеме из предыдущей задачи, записывается в виде следующих таблиц:

r	$b_5(p_0, \leq r)$	$b_5(p_0, r)$	$b_5(p_0, \geq r)$
0	0.237	$(0.75)^5 = 0.237$	1.000
1	0.633	$0.396 = 0.633 - 0.237$	$0.763 = 1.000 - 0.237$
2	0.896	$0.263 = 0.896 - 0.633$	$0.367 = 1.000 - 0.633$
3	0.984	$0.088 = 0.984 - 0.896$	$0.104 = 1.000 - 0.896$
4	0.999	$0.015 = 0.999 - 0.984$	$0.016 = 1.000 - 0.984$
5	1.000	$(0.25)^5 \approx 0.001 = 1.000 - 0.999$	$0.001 = 1.000 - 0.999$

B	3	4	5
$\alpha_B \triangleq b_5(p_0, \geq B)$	0.104	0.016	0.001

α	0.005	0.01	0.025	0.05	0.10	0.104
B_α^+	5	5	4	4	4	≈ 3

Задача 67.

По каналу связи передаётся сообщение, состоящее из одного символа: 0 или 1. Вероятность искажения в канале двоичного символа равна 0.2. Для увеличения надёжности символ дублируется несколько раз и ответом признаётся выходной символ, встречающийся в большинстве случаев. Сколько раз надо продублировать сообщение, чтобы ошибка передачи была не более 0.02? Оговорить условия, при которых применима та математическая схема, которую вы будете использовать при решении. Описать графически зависимость ошибки передачи от числа дублирующих символов.

С помощью таблицы **Table A.1** для $n = 1, 2, 3, \dots$, вычисляются уровни значимости

$$\alpha_n = \Pr\{S_N \geq n + 1\} = \sum_{x=n+1}^N \binom{N}{x} p_0^x (1 - p_0)^{N-x}, \quad \text{где } p_0 = 0.2, \quad N = 2n + 1,$$

при проверке гипотезы

$$\mathbf{H}_0 : p = p_0 = 0.2 \quad \text{против альтернативы} \quad \mathbf{H}_1 : p > p_0 = 0.2,$$

когда число испытаний (передач по каналу связи) N нечётно, т.е. $N = 2n + 1$, число успехов S_N есть число появлений на выходе канала двоичного символа, отличного от повторённого (переданного) $N = 2n + 1$ раз на входе канала, а в качестве критического значения выбирается $B^+ = n + 1$. Далее находим минимально возможное n или $2n + 1$, при котором $\alpha_n < \alpha^{(cr)} = 0.02$.

Задача 68.

Опытный руководитель некоторого коллектива, состоящего из 10 человек, принимает правильные решения в среднем в 99% случаев, в то время как каждый из его молодых коллег делает это примерно в 70% случаев. Разумно ли руководителю менять своё решение, если оно не совпадает с «решением большинства» молодых коллег? Обратит внимание на ограничения, накладываемые на реальную схему, которые будут использоваться при решении задачи.

Если каждый из $n = 10$ молодых коллег принимает *неправильное* решение с вероятностью $p_0 = 0.3$ независимо друг от друга, а число успехов S_n – число молодых коллег, принявших неправильное решение, то рассматриваемая задача определения «необходимого большинства» эквивалентна вычислению с помощью таблицы **Table A.1** критического значения B_α^+ , $\alpha = 0.01$, при проверке гипотезы

$$\mathbf{H}_0 : p = p_0 = 0.3 \quad \text{против альтернативы} \quad \mathbf{H}_1 : p > p_0 = 0.3.$$

Задача 69.

В одной из областей мозга 60% нейронов продуцируют некий тип активности. Сколько надо сделать записей (нейронограмм) для того, чтобы с надёжностью 90% быть уверенным, что получена хотя бы одна с нужным типом активности?

Вычисляются уровни значимости

$$\alpha_n = \Pr\{S_n \geq B^+\} = \sum_{x=B^+}^n \binom{n}{x} p_0^x (1-p_0)^{n-x}, \quad \text{где } p_0 = 0.4, \quad B^+ = n, \quad n = 2, 3, \dots,$$

при проверке гипотезы

$$\mathbf{H}_0 : p = p_0 = 0.4 \quad \text{против альтернативы} \quad \mathbf{H}_1 : p > p_0 = 0.4,$$

для (n, p) - испытаний Бернулли, когда n – общее число сделанных записей, S_n – число (случайное) записей, *не содержащих* нужный тип активности, а в качестве критического значения выбирается $B^+ = n$. С помощью таблицы **Table A.1** вычисляется минимально возможное n , при котором $\alpha_n < 0.1$.

Задача 70.

Что вероятнее выиграть у равносильного противника: не менее 8 партий из 10 или не менее 11 партий из 14.

Вычисляются для сравнения уровни значимости

$$\alpha_n = \Pr\{S_n \geq B^+\} = \sum_{x=B^+}^n \binom{n}{x} p_0^x (1-p_0)^{n-x}, \quad \text{где } p_0 = 0.5,$$

при проверке гипотезы

$$\mathbf{H}_0 : p = p_0 = 0.5 \quad \text{против альтернативы} \quad \mathbf{H}_1 : p > p_0 = 0.5$$

для случая, когда $n = 10$, $B^+ = 8$, и случая, когда $n = 14$, $B^+ = 11$.

Задача 71.

Трое студентов обсуждают шахматные способности студентов - математиков. Один утверждает, что большинство математиков (скажем 90% от общего числа) хорошо играют в шахматы; второй утверждает, что лишь очень немногие (скажем 90%) хорошо играют в шахматы, а третий студент думает, что математик с одинаковой вероятностью может оказаться и плохим и хорошим шахматистом. Студенты условились, что пари выиграет первый из них, если из 10 студентов - математиков, анализ шахматных способностей которых они произведут, хорошими шахматистами окажутся 8 или больше математиков; второй – если 2 или меньше, во всех остальных случаях выигрывает третий. Для каждого студента найти вероятность того, что он выиграет пари, если прав.

Рассмотрим схему проверки статистических гипотез для $n = 10$ испытаний Бернулли с критическими значениями $B^- = 2$ и $B^+ = 8$. Требуется (с помощью таблицы **Table A.1**) вычислить следующие характеристики.

1. Надёжность

$$1 - \alpha_1 = \Pr\{B^- + 1 \leq S_n \leq B^+ - 1\} = \sum_{x=3}^7 \binom{10}{x} p_0^x (1 - p_0)^{10-x}, \quad \text{где } p_0 = 0.5,$$

при проверке гипотезы

$$\mathbf{H}_0 : p = p_0 = 0.5 \quad \text{против двусторонней альтернативы} \quad \mathbf{H}_1 : p \neq p_0 = 0.5.$$

2. Надёжность

$$1 - \alpha_2 = \Pr\{S_n \leq B^-\} = \sum_{x=0}^2 \binom{10}{x} p_0^x (1 - p_0)^{10-x}, \quad \text{где } p_0 = 0.1,$$

при проверке гипотезы

$$\mathbf{H}_0 : p = p_0 = 0.1 \quad \text{против односторонней альтернативы} \quad \mathbf{H}_1 : p \geq p_0 = 0.1.$$

3. Надёжность

$$1 - \alpha_3 = \Pr\{S_n \geq B^+\} = \sum_{x=8}^{10} \binom{10}{x} p_0^x (1 - p_0)^{10-x}, \quad \text{где } p_0 = 0.9,$$

при проверке гипотезы

$$\mathbf{H}_0 : p = p_0 = 0.9 \quad \text{против односторонней альтернативы} \quad \mathbf{H}_1 : p \leq p_0 = 0.9.$$

Расчётные формулы в задачах 72–75. Пусть $x_\alpha^+ > 0$ ($x'_\alpha = x_{\alpha/2}^+ > 0$) обозначает одностороннее (двустороннее) критическое значение стандартного нормального распределения $\mathcal{N}(0, 1)$ для уровня значимости α . При больших значениях n центральная предельная теорема (ЦПТ) даёт следующие формулы для верхней B_α^+ и нижней B_α^- квантилей (критических значений) биномиальных вероятностей:

- односторонние критические значения

$$B_\alpha^+ = np + x_\alpha^+ \cdot \sqrt{np(1-p)}, \quad B_\alpha^- = np - x_\alpha^+ \cdot \sqrt{np(1-p)}, \quad (1)$$

- двусторонние критические значения

$$B_\alpha^+ = np + x'_\alpha \cdot \sqrt{np(1-p)}, \quad B_\alpha^- = np - x'_\alpha \cdot \sqrt{np(1-p)}. \quad (2)$$

Соотношения (2) равносильны тому, что вероятность

$$\Pr \left\{ |S_n - np| < x'_\alpha \sqrt{np(1-p)} \right\} = \Pr \left\{ \left| \frac{S_n}{n} - p \right| < \frac{x'_\alpha \sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \right\} = 1 - \alpha. \quad (3)$$

Поскольку $p(1-p) \leq 1/4$ с равенством лишь при $p = 1/2$, то из (3) вытекает, что для любого значения параметра p , $0 < p < 1$, вероятность

$$\Pr \left\{ |S_n - np| < \frac{x'_\alpha \sqrt{n}}{2} \right\} = \Pr \left\{ \left| \frac{S_n}{n} - p \right| < \frac{x'_\alpha}{2\sqrt{n}} \right\} \geq 1 - \alpha. \quad (4)$$

Формула (4) означает, что при заданных коэффициенте доверия $1 - \alpha$ и числе испытаний n центр $\hat{p}$ доверительного интервала для неизвестного p , $0 < p < 1$, и радиус ϵ доверительного интервала для неизвестного p , $0 < p < 1$, имеют вид

$$\hat{p} = \frac{S_n}{n}, \quad \epsilon = \frac{x'_\alpha}{2\sqrt{n}} \iff n = \left(\frac{x'_\alpha}{2\epsilon} \right)^2. \quad (5)$$

Задача 72.

При проведении телепатического опыта индуктор независимо от предшествующих проб выбирает с вероятностью $\frac{1}{2}$ один из двух предметов и думает о нём, а реципиент угадывает о каком. Опыт был повторен 100 раз и было получено 60 правильных ответов. Можно ли приписать полученный результат чисто случайному совпадению или нет?

Для $n = 100$, $p = 0.5$ и $\alpha = 0.001; 0.01; 0.05$ по формуле (1) вычисляются верхние односторонние критические значения B_α^+ , сравнение которых с полученным в опытах значением $S_n = 60$ позволяет на уровне значимости α проверить гипотезу об *отсутствии телепатии* $H_0 : p = p_0 = 0.5$ против альтернативы *наличия связи* между реципиентом и индуктором $H_1 : p > p_0 = 0.5$.

Задача 73.

Требуется оценить вероятность того, что (околопороговый) раздражитель воспринимается испытуемым. Желательно оценить эту вероятность с ошибкой, не превосходящей 0.1. Каким должно быть число предъявлений раздражителя, чтобы надёжность оценки была 95%? Реально ли требовать ошибки меньшей 0.005?

Пусть p , $0 < p < 1$, - неизвестная вероятность того, что раздражитель воспринимается испытуемым, n - число опытов, т.е. число предъявлений раздражителя, а число успехов S_n - в n опытах определяется как число предъявлений раздражителя, при которых последний был воспринят испытуемым. Для заданных $\epsilon = 0.1$ и $1 - \alpha = 0.95$ требуемое n можно приближенно оценить по последней из формул (5).

Задача 74.

Пусть имеется последовательность сигналов двух типов, состоящая из 400 независимых сигналов, предназначенных для исследования реакции выбора и генерируемых с вероятностями 0.3 и 0.7. Найти вероятность того, что частота (доля) сигналов первого типа будет заключена между 0.2 и 0.4. Указать интервал частотных колебаний, допустимых с вероятностью 0.9.

Из соотношения (3) вытекает, что связь параметров $(\epsilon; 1 - \alpha)$ описывается формулой

$$\epsilon = \frac{x'_\alpha \sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}, \quad (6)$$

где для данной задачи $n = 400$, $p = 0.3$ и $1 - p = 0.7$. Следовательно,

1. для заданного радиуса интервала колебаний частот $\epsilon = 0.4 - 0.3 = 0.3 - 0.2 = 0.1$ сначала по формуле (6) находим x'_α , а затем с помощью таблицы **Table A.3** вычисляем соответствующий коэффициент доверия $1 - \alpha$;
2. наоборот, при заданном коэффициенте доверия $1 - \alpha = 0.9$ сначала с помощью **Table A.3** находим x'_α , а затем по формуле (6) вычисляется соответствующий радиус интервала колебаний частот ϵ .

Задача 75.

Театр, вмещающий 1000 человек, имеет два разных входа. Около каждого из входов имеется свой гардероб. Сколько мест должно быть в каждом из гардеробов, чтобы в среднем в 99 случаях из 100 все зрители могли раздеться в гардеробе того входа, через который они вошли? Предполагается, что зрители приходят парами и каждая пара независимо от других выбирает с вероятностью $\frac{1}{2}$ любой из входов. Насколько можно будет сократить число мест в гардеробе, если зрители будут приходить поодиночке и также независимо друг от друга с равной вероятностью выбирать любой из входов?

Если все $n = 1000$ зрителей приходят поодиночке, и случайное число S_n ($n - S_n$) среди них заходят в первый (второй) гардероб, то при заданной надёжности $1 - \alpha = 0.99$ требуемое число B мест в каждом из двух гардеробов вычисляется из условия:

$$1 - \alpha = 0.99 = \Pr\{S_n \leq B, n - S_n \leq B\} = \Pr\{n - B \leq S_n \leq B\}.$$

Следовательно, в силу формулы (3), искомое число

$$B = B_\alpha^+ = np + x'_\alpha \cdot \sqrt{np(1-p)}, \quad n = 1000, \quad p = 1/2, \quad 1 - \alpha = 0.99,$$

совпадает с критическим значением, используемым при проверке на уровне значимости $\alpha = 1 - 0.99 = 0.01$ статистической гипотезы

$$\mathbf{H}_0 : p = p_0 = 0.5 \quad \text{против двусторонней альтернативы} \quad \mathbf{H}_1 : p \neq p_0 = 0.5.$$

Если же зрители приходят парами, где число пар $m = 500$, то требуемое число мест B' в каждом из двух гардеробов есть

$$B' = 2 \left[mp + x'_\alpha \cdot \sqrt{mp(1-p)} \right], \quad m = 500, \quad p = 1/2, \quad 1 - \alpha = 0.99.$$